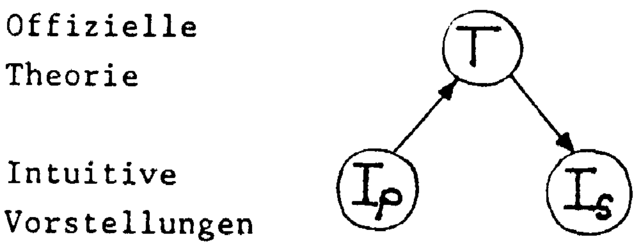
VORSTELLUNGEN VON SCHÜLERN ÜBER WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNGEN

Sonja Traar, Klagenfurt

1. Einleitung

Die folgenden Ausführungen bilden einen kleinen Ausschnitt aus einer Untersuchung, die ich im Jahre 1989 durchgeführt habe (siehe TRAAR 1989). Der Ansatz dieser Untersuchung beruht auf der Idee, daß man in der Mathematik zwei Bereiche unterscheiden kann, die man als offizielle Theorie und als persönliche intuitive Vorstellungen bezeichnen kann. Im Grunde weiß dies ja jeder tätige Mathematiker und jeder macht wohl auch die Erfahrung, daß die offizielle Theorie mit seinen intuitiven Vorstellungen manchmal nicht übereinstimmt. Die Diskrepanzen können unter Umständen sehr groß sein. In der Mathematikdidaktik wurde dieser Ansatz von FISCHBEIN (1975, 1977, 1978, 1987) entwickelt und von vielen anderen Autoren aufgegriffen.

FISCHBEIN teilt intuitive Vorstellungen ein in primäre und sekundäre intuitive Vorstellungen. Primäre Vorstellungen sind solche, die jemand hat, bevor er eine Theorie kennenlernt bzw. durch den Unterricht beeinflußt wird. Sekundäre Vorstellungen sind solche, die durch eine Theorie oder den Unterricht beeinflußt sind. Die Situation ist in der nebenstehenden Figur dargestellt.



Im ersten Schritt wird man auf der Basis seiner Primärvorstellungen mit einer Theorie T konfrontiert. Diese wirkt zurück auf die intuitiven Vorstellungen und führt die Primärvorstellungen I_p in Sekundärvorstellungen I_s über. Es ist eine Aufgabe des Unterrichts, primäre Vorstellungen der Schüler in sekundäre Vorstellungen überzuführen. Allerdings zeigen empirische Untersuchungen immer wieder ein Phänomen, nämlich daß primäre Vorstellungen eine oft ungeheure Trägheit besitzen und resistent gegenüber Änderungen sind. Die Rückwirkungen einer Theorie oder des Unterrichts auf die intuitiven Vorstellungen von Schülern sind meist viel kleiner als man annimmt (siehe dazu auch FISCHBEIN/GAZIT 1983,1984). Auch wenn eine Theorie im Unterricht sehr sauber behandelt wird, bleiben häufig primäre Vorstellungen erhalten. Diese schlagen dann bei Schülern immer wieder durch und können Verständnisschwierigkeiten erzeugen bzw. zu Fehlern führen. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind diese Schwierigkeiten anscheinend besonders groß, weil man aufgrund falscher intuitiver Vorstellungen besonders leicht in Fehlschlüsse verfallen kann. Wer die Wahrscheinlichkeitsrechnung erlernen will, muß bis zu einem gewissen Grad vertraute intuitive Vorstellungen aufgeben und durch neue ersetzen.

Der Lehrer sollte dem Schüler dabei helfen. Diese Aufgabe kann er aber nur erfüllen, wenn er überhaupt etwas über die intuitiven Vorstellungen seiner Schüler weiß. Hier hakt nun die Mathematikdidaktik als Wissenschaft ein, indem sie versucht, durch verschiedene empirische Forschungen zu ermitteln, welche intuitive Vorstellungen Schüler im Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung haben; kurz gesagt: was sich Schüler so alles im Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung denken.

In der Literatur wird bereits eine ganze Reihe von empirischen Untersuchungen angeführt, die mit dem Ziel durchgeführt wurden, mehr über das Denken von Schülern (und Erwachsenen) im Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu erfahren (vor allem PIAGET/INHELDER 1951, FISCHBEIN 1975, KAHNEMAN/TVERSKY 1972,1973,1974, KAHNEMAN/SLOVIC/TVERSKY 1982, SHAUGHNESSY 1977,1981,1983, GREEN 1982,1983ab, KAPADIA 1987,1989, SCHOLZ 1981, BENTZ/BOROVCNIK 1985,1986,1989, APU-Studie in England 1981-1983). Manche dieser Forschungen können eine riesige Anzahl von Versuchspersonen vorweisen. Z.B. wurde die Untersuchung von GREEN mit ca. 3000 englischen Kindern durchgeführt. Auch der APU-Studie liegen viele Versuchspersonen zugrunde. Derartige Untersuchungen können ihre Ergebnisse statistisch sehr gut absichern. Allerdings bleiben die Ergebnisse eher an der Oberfläche. Man weiß z.B. ziemlich genau, wieviel Prozent der englischen Schüler einen bestimmten Fehler machen, man erfährt aber relativ wenig darüber, was sich diese Schüler dabei gedacht haben. Andere Arbeiten wiederum sind eher als Fallstudien zu bezeichnen. Es wird mit einer geringen Anzahl von Versuchspersonen gearbeitet, dafür werden aber mit diesen mehr oder weniger ausführliche Interviews durchgeführt - mit dem Ziel, genaueres über das Denken dieser Personen zu erfahren.

Meine eigene Untersuchung gehört auch in diese Kategorie. Ich habe mit 16 Versuchspersonen im Alter von 4 - 29 Jahren gearbeitet und mit diesen ausführliche Interviews durchgeführt. Die Interviewdauer variierte zwischen einer und drei Stunden pro Versuchsperson. Manche Versuchspersonen wurden in Zweiergruppen interviewt. Die Interviews wurden auf Tonband aufgenommen und transkribiert. Anhand dieser Transkriptionen habe ich dann versucht, erwähnenswerte Ergebnisse herauszulesen und übersichtlich darzustellen. Diese Untersuchung dient also nicht dazu, irgendwelche Hypothesen statistisch zu untermauern, sondern ihr Hauptzweck ist, mehr über das Denken von Schülern im Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu erfahren.

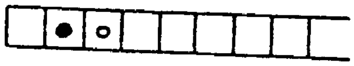
Auf einige Ergebnisse sei nun eingegangen.

2. Vorstellungen zur Gleichverteilung

Ich habe diese Vorstellungen anhand einer Münze und anhand eines Würfels untersucht. Es geht um die Frage, ob beim Münzwurf Zahl und Wappen gleich wahrscheinlich sind bzw. ob beim Würfeln die Augenzahlen gleich wahrscheinlich sind. Zu diesem Thema gibt es bereits einige empirische Untersuchungen (KERSLAKE 1974, TRURAN 1986, MONKS 1986). Diese Untersuchungen zeigen, daß Kinder und Erwachsene manchmal recht merkwürdige Vorstellungen vom Münzwurf und vom Würfel haben. So berichtet KERSLAKE von einer Befragung von 700 englischen Schülern im Alter von 10 - 14 Jahren. In den ersten drei Klassen glaubten etwa 70% der Schüler, daß einige Augenzahlen eines Würfels leichter zu erhalten seien als andere. Von den Schülern der vierten Klassen glaubten dies immerhin noch 59%. Im allgemeinen glaubten diese Schüler, daß die Augenzahl 6 am schwersten zu erhalten sei. KERSLAKE erklärt dies damit, daß bei manchen Brettspielen (z.b. Mensch ärgere dich nicht) ein Sechser erforderlich ist, bevor das Spiel überhaupt begonnen werden darf. Verstärkend wirkt hier nach ihrer Ansicht noch die Tatsache, daß manche Kinder annehmen, die Erwachsenen hätten die Regeln so festgesetzt, daß ein Spielbeginn möglichst schwierig sei.

Da in meinen eigenen Untersuchungen die Behandlung von Münze und Würfel ziemlich analog erfolgte, will ich im folgenden nur über den Würfel berichten. Ich habe meinen Versuchspersonen folgende Aufgabe gestellt:

Stell dir vor, wir spielen "Mensch ärgere dich nicht". Dir gehört der schwarze, mir der weiße Stein. Du bist dran. Welcher der folgenden 3 Fälle wäre dir am liebsten:

1. Fall: 

2. Fall: 

3. Fall: 

(Bei 6 darf nicht noch einmal gewürfelt werden.)

Es geht also um die Frage, ob die einzelnen Augenzahlen gleich wahrscheinlich sind. (Von dem Vorteil, daß der schwarze Stein im 3. Fall voraussichtlich am längsten hinter dem weißen Stein bleiben kann, wird abgesehen.)

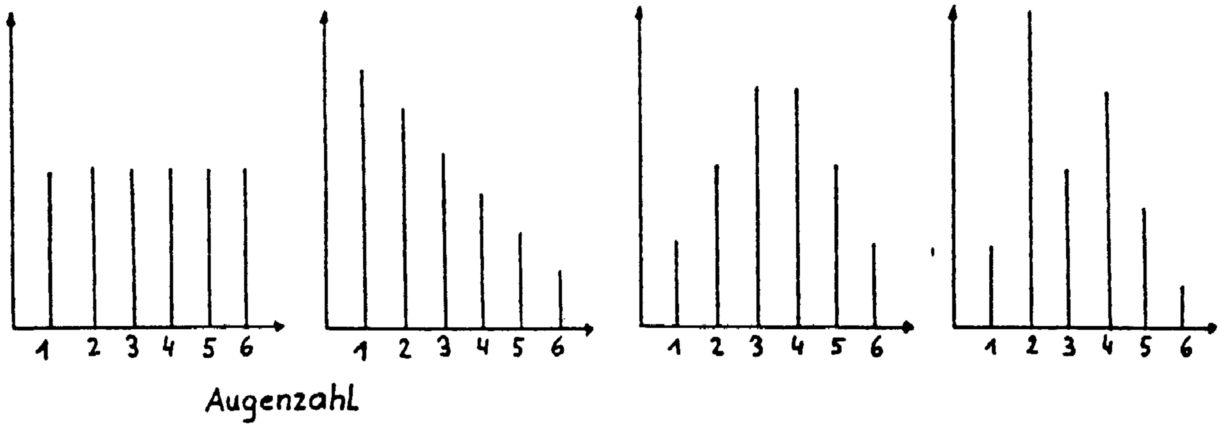
Es ergab sich folgendes: Von den 12 befragten Personen waren nur 4 von der Gleichwahrscheinlichkeit der einzelnen Augenzahlen überzeugt. Zwei glaubten an die Gleichwahrscheinlichkeit mit gewissen Zweifeln in bezug auf den Sechser. Sechs Versuchspersonen hielten die Augenzahlen nicht für gleich wahrscheinlich. (Das Alter dieser Personen war:10,12,12,17,25,26 Jahre.) Diese Personen gaben für ihre Ansicht Begründungen an. Dabei kamen im wesentlichen drei Argumentationsmuster vor:

a) Berufung auf eigene Erfahrung
Meist beriefen sich die Versuchspersonen auf ihre angebliche Spielerfahrung und behaupteten - ganz im Sinne von KERSLAKE - daß ein Sechser seltener kommt als andere Augenzahlen.

b) Bevorzugung der mittleren Augenzahlen
Die mittleren Augenzahlen 2,3,4 wurden für wahrscheinlicher gehalten als die Extremfälle 1 und 6.

c) Bevorzugung bestimmter Zahlen
Manche Versuchspersonen bezeichneten eine bestimmte Zahl als Glückszahl oder Lieblingszahl und schrieben ihr eine besonders große Wahrscheinlichkeit zu.

Um mehr über die Vorstellungen der Versuchspersonen zu erfahren, wurden ihnen folgende Diagramme vorgelegt:



Die Versuchspersonen wurden gefragt, welches dieser Diagramme die Wahrscheinlichkeiten der Augenzahlen richtig wiedergebe. Von den sechs Versuchspersonen, die die einzelnen Augenzahlen nicht für gleich wahrscheinlich hielten, wählte natürlich niemand das 1. Diagramm. Einige entschieden sich für eines der drei restlichen Diagramme, einige waren mit keinem Diagramm einverstanden und zeichneten ein eigenes. Es zeigte sich, daß diese Versuchspersonen so festgefügte Vorstellungen hatten, daß man sagen kann, sie tragen eine innere Verteilung der Wahrscheinlichkeiten der Augenzahlen mit sich. Im weiteren Verlauf dieser Untersuchung zeigte sich, daß diese innere Verteilung sehr stabil war.

Betrachten wir als Beispiel einen Ausschnitt aus dem Interview mit Elke (17):

> I: Welcher dieser drei Fälle <Augenzahl 1,4,6> wäre dir lieber?
> E: Der zweite Fall. Da muß ich eine 4 würfeln. Beim ersten und beim dritten Fall muß ich eine 1 oder eine 6 würfeln. Das sind die Extremfälle.
> I: Welche Augenzahlen sind denn leichter zu erhalten?
> E: 2,3,4,5.
> I: Welche Augenzahl ist am leichtesten zu erhalten?
> E: Die 4.
> I: Warum die 4?
> E: Weil sie so schön in der Mitte liegt. Es liegt auch 3 in der Mitte. Trotzdem glaube ich, ist die 4 leichter zu erhalten, weil sie öfter gewürfelt wird.
> I: Welche Augenzahl ist am schwersten zu erhalten?
> E: Die 6.
> I: Warum die 6?
> E: Bei den meisten Spielen braucht man eine 6. Die kommt aber fast nie.
> I: Welche der Zahlen von 1 bis 6 ist am wahrscheinlichsten?

E: Die 4.
I: Wieviel wahrscheinlicher ist denn die 4 als die 6?
E: Ich glaube, wenn ich 1-mal die 6 würfle, würfle ich 4-mal die 4.
I: Welches der folgenden Diagramme gibt deiner Meinung die Wahrscheinlichkeiten für die Augenzahlen richtig wieder?
E: Das dritte Diagramm. 1 und 6 haben die kleinste Wahrscheinlichkeit und 3 und 4 die größte. Bei 4 könnte die Wahrscheinlichkeit noch ein bißchen größer sein.

Bei einigen Versuchspersonen konnte man einen deutlichen Konflikt zwischen der Einsicht in die Gleichwahrscheinlichkeit der Augenzahlen und ihrer inneren Verteilung bemerken, gewissermaßen ein Konflikt zwischen theoretischer Einsicht und intuitiven Vorstellungen.

Ich will als nächstes zeigen, daß diese inneren Verteilungen keineswegs harmlos sind, sondern sich bei einfachen Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung störend auswirken können und Fehler hervorrufen können. Ich ließ die Versuchspersonen verschiedene Ereignisse miteinander vergleichen. Z.B. fragte ich sie, welches Ereignis wahrscheinlicher sei:

$\{2,4,6\}$	oder	$\{1,3,5\}$
$\{2,4,6\}$	oder	$\{3,5\}$
$\{1,6\}$	oder	$\{2,3,4,5\}$

Die Versuchspersonen, deren innere Verteilung von der Gleichverteilung abwich, verglichen hier nicht die Anzahlen der beiden Mengen, sondern ließen sich von ihrer inneren Verteilung leiten und kamen so zu falschen Antworten. Betrachten wir dazu einen Ausschnitt aus dem Interview mit der vorhin erwähnten Elke, die die Zahl 4 bevorzugt und die Extremfälle 1 und 6 für sehr unwahrscheinlich hält:

I: Was ist wahrscheinlicher:
$\{2,4,6\}$ oder $\{1,3,5\}$
E: 2,4,6 ist wahrscheinlicher, da ist die 4 dabei. Das ist zumindest bei mir so. Ich glaube aber auch, daß auch andere die 4 öfter würfeln als andere Zahlen.
I: Was ist wahrscheinlicher:
$\{2,4,6\}$ oder $\{3,5\}$
E: 3,5. Da fallen jetzt die Extremfälle weg. Bei 2,4,6 ist 6 dabei.

Bei denjenigen Schülern, die die Augenzahlen eines Würfels für gleich wahrscheinlich hielten, darf man keineswegs annehmen, daß hinter dieser Ansicht richtige Vorstellungen stehen. Praktisch keine Versuchsperson konnte eine Begründung für diese Gleichwahrscheinlichkeit angeben, hingegen fand sich häufig ein falsches Denkmuster vor, welches man durch folgende Assoziationskette beschreiben kann: Zufall - mehrere Möglichkeiten - Unmöglichkeit konkreter Voraussagen $\Rightarrow$ Gleichwahrscheinlichkeit.

Beim Würfel führt dies zufällig zum richtigen Ergebnis. Leider konnte ich beobachten, daß dieses Denkmuster auch in Situationen verwendet wird, wo es zu einem falschen Ergebnis führt. Z.B. behauptete Armin (14), daß die Ereignisse $\{2,4,6\}$ und $\{3,5\}$ gleich wahrscheinlich seien. Seine Begründung lautete etwa so: Das Ergebnis eines Wurfes hängt vom Zufall ab. Es kann eine Zahl aus der einen Menge oder aus der anderen Menge kommen. Man kann nichts Konkretes vorhersagen, daher ist eine Zahl in der einen Menge gleich wahrscheinlich wie eine Zahl in der anderen Menge. Armin hielt solche Ereignisse immer für gleich wahrscheinlich, unabhängig von der Elementeanzahl der Mengen.

Im Verlauf der Interviews legte ich drei Würfel auf die Hand, wobei einmal 1, einmal 3 und einmal 6 obenauf lag. Ich fragte die Versuchspersonen, in welchem Fall ein Sechser am wahrscheinlichsten sei. Von den 11 befragten Personen waren nur 4 der Meinung, daß die Augenzahl von der Ausgangslage unabhängig sei. Sie gaben dafür jedoch keine Begründung an. Die restlichen Versuchspersonen waren der Meinung, daß die gewürfelte Augenzahl von der Ausgangslage abhängig sei. Sie gaben dafür Begründungen an, wobei man folgende Argumentationsmuster unterscheiden kann:

a) Einmaliges Umdrehen
   Manche nahmen an, daß sich der Würfel am wahrscheinlichsten genau einmal umdreht, womit ein Sechser im 1. Fall am wahrscheinlichsten ist.

b) Ganze Umdrehung
   In diesem Fall kann sich der Würfel öfter als einmal herumdrehen, jedoch sind ganze Umdrehungen (360°) wahrscheinlicher als halbe Umdrehungen (180°), wodurch ein Sechser im 3. Fall am wahrscheinlichsten ist.

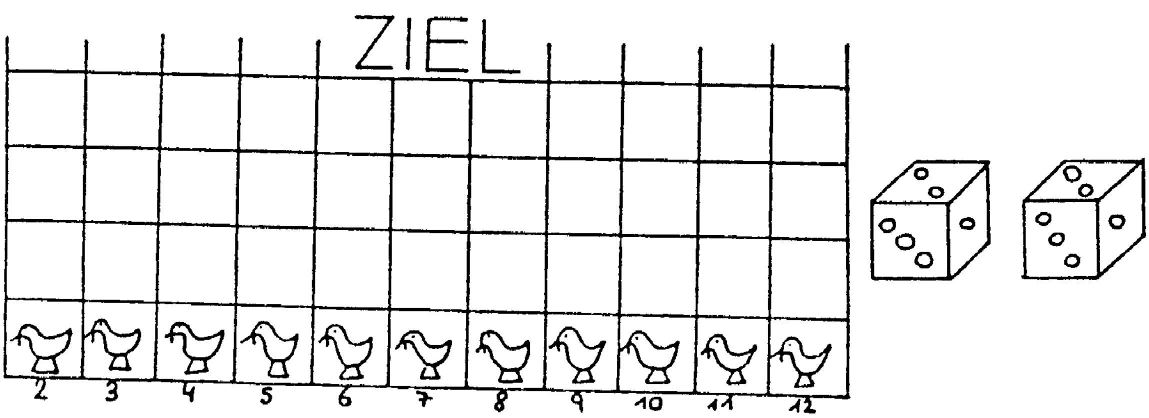
c) Wiederholungsargument
Manche glaubten, wenn ein Sechser vor dem Wurf vorhanden ist, ist er nach dem Wurf eher nicht vorhanden, weil eine Wiederholung der gleichen Augenzahl unwahrscheinlich ist.

d) Benachteiligung der Seitenlagen
Manche stellten sich den Wurf eines Würfels so vor, daß dieser nicht zur Seite rollt und daß daher die Seitenlagen benachteiligt sind. Somit ist ein Sechser im 2. Fall unwahrscheinlicher als im 1. oder 3. Fall.

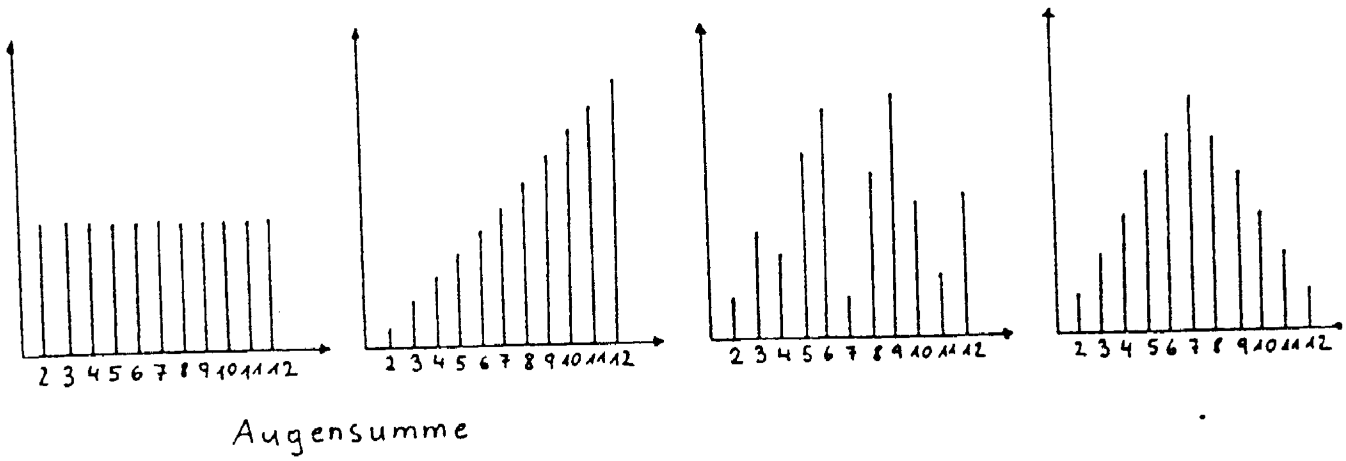
e) Butterbrotargument
Dieses Argument trat nur beim Münzwurf auf. Wenn Zahl obenauf war, hielten die Versuchspersonen Wappen für wahrscheinlicher, mit dem Argument: wenn mir ein Butterbrot hinunterfällt, fällt es auch meist auf die Butterseite.

3. Vorstellungen zur Dreiecksverteilung (Augensumme zweier Würfel)

Diese Interviews wurden mit einem "Entenspiel" eingeleitet. Es wird mit zwei Würfeln geworfen und die Augensumme gebildet. Die Ente mit der entsprechenden Nummer darf ein Feld vorrücken. Diejenige Ente, die zuerst am Ziel ist, hat gewonnen.



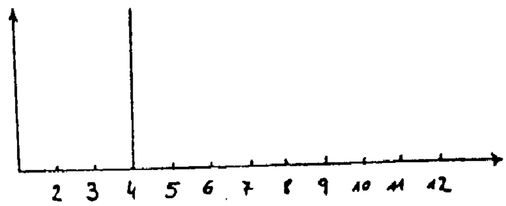
Die Versuchspersonen wurden gefragt, welche Ente sie nehmen wollen. Nachdem geklärt wurde, wie groß die kleinst- bzw. größtmögliche Augensumme ist, wurden die Versuchspersonen gefragt, welches der folgenden Diagramme ihrer Meinung nach die Wahrscheinlichkeiten der Augensummen richtig wiedergibt:



Die Zufallsvariable "Augensumme" ist dreiecksverteilt. Somit ist das vierte Diagramm das richtige.

Von den 11 befragten Personen wählten jedoch nur 5 das 4. Diagramm. Manche von ihnen konnten richtig begründen, daß die Augensumme 7 am wahrscheinlichsten ist, weil 7 am meisten Zerlegungen in zwei Summanden gestattet. Manche wählten zwar das vierte Diagramm, gaben jedoch falsche Begründungen an, die auf ihrer inneren Verteilung der Wahrscheinlichkeiten der Augenzahlen eines Würfels beruhten.

Die 6 Personen, die nicht das 4. Diagramm wählten, ließen sich alle von ihrer <u>inneren Verteilung</u> leiten. Die 12-jährige <u>Christina</u> etwa, die die Augenzahlen 3,4,5 für wahrscheinlicher hält als die übrigen, bevorzugt konsequenterweise jene Augensummen, die man mit den Zahlen 3,4,5 bilden kann. Die 29-jährige <u>Johanna</u>, die 1 und 6 für unwahrscheinlicher hält als die übrigen Augenzahlen, hält konsequenterweise die Paare (1,1) und (6,6) für unwahrscheinlicher als die übrigen Paare und bevorzugt die mittleren Enten. Die 12-jährige <u>Iris</u>, die die Augenzahl 4 favorisiert, weil 4 ihre Lieblingszahl ist, favorisiert auch die Augensumme 4 und zeichnet folgendes Diagramm:



Ich half jeder Versuchsperson, alle möglichen Paare von Augenzahlen der beiden Würfel anzuschreiben. Nachdem dies getan war, konnten alle

- mehr oder weniger - mühelos erkennen, daß 7 die wahrscheinlichste Augensumme und somit das 4. Diagramm das richtige ist.

Bei einigen zeigte sich ein deutlicher Überraschungseffekt. Manche jedoch zeigten Zweifel und gerieten in einen Konflikt zwischen dieser theoretischen Einsicht und ihren intuitiven Vorstellungen. Beispielsweise erkennt der 10-jährige Steffan, daß es für die Augensumme 7 am meisten Paare gibt, andererseits ist die Augensumme 6 das Doppelte seiner Lieblingszahl 3. Steffan schwankt hin und her, entscheidet sich aber letztlich für die Augensumme 6 als die wahrscheinlichere.

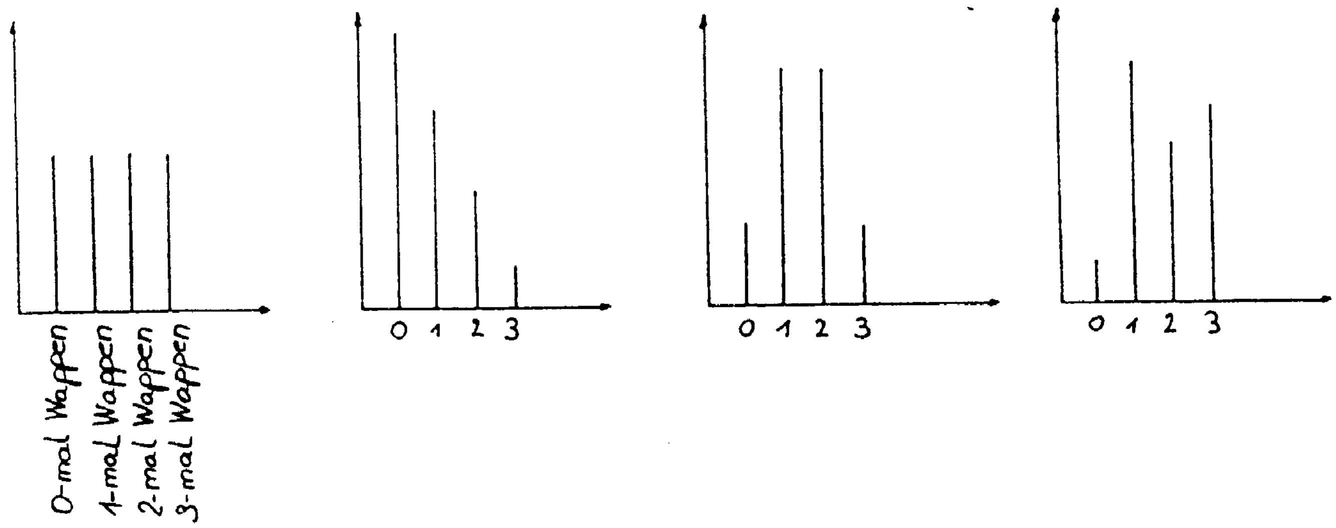
Der 14-jährige Armin wendete wieder sein bewährtes Denkmuster "Zufall - mehrere Möglichkeiten - Unmöglichkeit konkreter Voraussagen $\Rightarrow$ Gleichwahrscheinlichkeit" an und hielt alle Augensummen für gleich wahrscheinlich. Er war von dieser Ansicht auch nicht abzubringen, nachdem er alle Paare aufgeschrieben und die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Augensummen bestimmt hatte. Schüler, die so denken, kommen natürlich bei jeder Aufgabenstellung zu einer Gleichverteilung. Andere Verteilungen sind für sie nicht denkbar. Bei Armin war auch auffällig, daß er einen geradezu fatalistischen Glauben an die Vorherbestimmung besaß. Neben dem genannten Denkmuster fand sich bei ihm häufig ein ähnliches Denkmuster: Zufall - mehrere Möglichkeiten - Unmöglichkeit der Beeinflussung $\Rightarrow$ Gleichwahrscheinlichkeit.

> I: Kannst du jetzt die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Augensummen miteinander vergleichen?
> A: Das hängt vom Zufall ab. Der Sechser <die Augensumme 6> hat mehr Möglichkeiten, gewürfelt zu werden. Wenn für mich aber bestimmt ist, daß ich sehr oft die Augensumme 3 würfle, dann wird es auch so sein. Ich werde dann fast immer 1 und 2 würfeln. Ich weiß aber nicht, welche Augensumme für mich bestimmt ist. Die Möglichkeiten für die Augensummen sind mir egal. Es kann sein, daß die Ente 2 schneller ist, als die Ente 7. Das hängt vom Glück und vom Zufall ab!
> I: Glaubst du nicht doch, daß die Augensumme 7 öfter gewürfelt wird als die Augensumme 2?
> A: Für die Augensumme 7 gibt es sechs Möglichkeiten und für die Augensumme 2 gibt es nur eine Möglichkeit. Die Möglichkeiten haben aber mit dem Würfeln nichts zu tun. Deshalb, glaube ich, sind alle Augensummen gleichberechtigt.

Ich möchte solche Auffassungen als fatalistische Gleichwahrscheinlichkeit bezeichnen.

4. Vorstellungen zur Binomialverteilung

Die Aufgabenstellung lautete hier: 3 Münzen werden geworfen. Wir zählen die Anzahl der Wappen. Welches Diagramm gibt die Wahrscheinlichkeiten der Wappenanzahlen richtig wieder?



Die Zufallsvariable "Wappenanzahl" ist binomialverteilt mit den Parametern n=3, p=0,5. Somit ist das dritte Diagramm das richtige.

Von den 7 befragten Personen wählten allerdings nur 3 dieses Diagramm, wobei lediglich der 17-jährige Robert eine vernünftige Begründung dafür geben konnte. Vier Personen entschieden sich für das erste Diagramm, d.h. hielten alle Wappenanzahlen für gleich wahrscheinlich. Zur Begründung wurden im wesentlichen zwei Argumentationsmuster herangezogen:

a) Das uns schon bekannte Denkmuster: Zufall - mehrere Möglichkeiten - Unmöglichkeit konkreter Voraussagen $\Rightarrow$ Gleichwahrscheinlichkeit.
b) Naive Übertragung der Gleichwahrscheinlichkeit von Zahl und Wappen bei einer Münze auf die Wappenanzahl bei drei Münzen.

Die Versuchspersonen, die diese naive Übertragung durchführten, machten den Fehler, daß sie die drei Münzen nicht unterschieden. Auf dieses Problem möchte ich noch kurz eingehen:

Unterscheidet man die Münzen, gibt es 8 Versuchsausfälle wie in der nebenstehenden Figur. Sieht man diese 8 Versuchsausfälle als gleich wahrscheinlich an, ergibt sich daraus, daß die Wahrscheinlichkeit für 1-mal Wappen bzw. 2-mal Wappen dreimal so groß ist wie die Wahrscheinlichkeit für 0-mal Wappen bzw. 3-mal Wappen, entsprechend dem 3. Diagramm.

ZZZ	0-mal Wappen
ZZW ZWZ WZZ	1-mal Wappen
ZWW WZW WWZ	2-mal Wappen
WWW	3-mal Wappen

Unterscheidet man jedoch die Münzen nicht, gibt es 4 Versuchsausfälle: 0-mal Wappen, 1-mal Wappen, 2-mal Wappen, 3-mal Wappen. Nimmt man diese Versuchsausfälle als gleich wahrscheinlich an, kommt man zum 1. Diagramm.

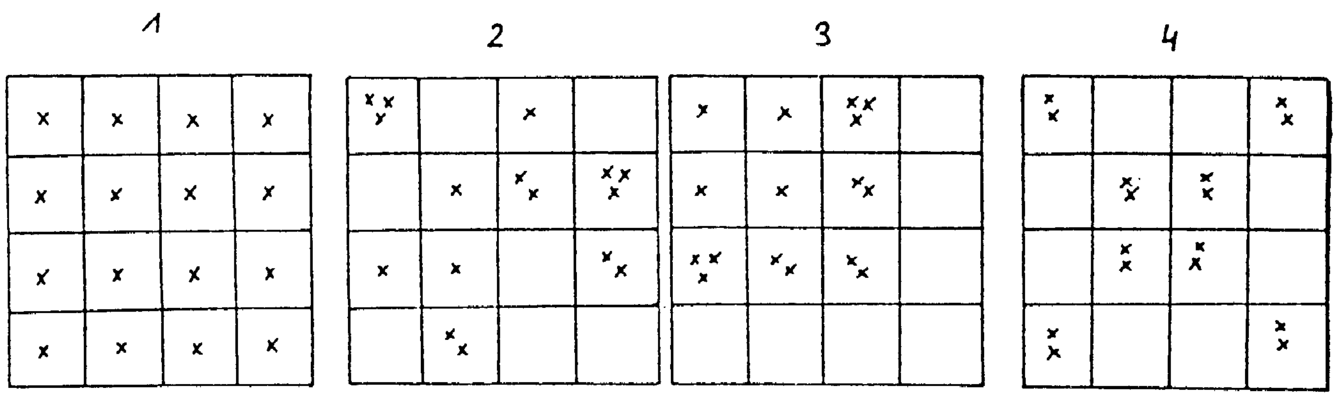
Um zur richtigen Lösung zu kommen, muß man die Münzen bekanntlich unterscheiden. Aber warum muß man dies eigentlich tun? Die Interviews haben gezeigt, daß dies den Versuchspersonen keineswegs selbstverständlich ist. Im Gegenteil: Diejenigen Versuchspersonen, die sich für das 1. Diagramm entschieden, wehrten sich mehr oder weniger heftig gegen eine Unterscheidung der Münzen und sahen dies als unnatürlich an.

Im Mathematikunterricht macht man hier meist kurzen Prozeß. Man teilt den Schülern entweder mit, daß das 1. Modell besser auf die Realität paßt als das zweite (was man durch eine Versuchsserie zeigen kann) oder man argumentiert irgendwie in der Theorie. Im Grunde werden aber hier die intuitiven Vorstellungen mancher Schüler recht brutal überfahren. Man darf sich nicht wundern, daß diese in Konflikte kommen. Das war auch in den Interviews so. Nachdem ich den Versuchspersonen die offizielle Lösung mit der Unterscheidung der Münzen gezeigt habe, blieben bei den meisten deutliche Zweifel übrig.

5. Vorstellungen zur Poissonverteilung

Zu dieser Verteilung habe ich mehrere Aufgaben gestellt. Ich möchte hier aber nur auf eine eingehen, die man in der Literatur bereits als eine klassische Aufgabe ansehen kann. Es handelt sich um die Schneeflockenaufgabe, die schon PIAGET in seinen Untersuchungen verwendet hat und die auch in der umfassenden Untersuchung von GREEN vorkommt:

Auf einem Fliesenboden beginnt es zu schneien. Es sind bereits 16 Flocken gefallen. Welches Muster erscheint dir am wahrscheinlichsten?



Wir betrachten zuerst die "offizielle" theoretische Lösung dieser Aufgabenstellung. In der Theorie geht man von der Annahme aus, daß das "Muster" keine Rolle spielt und daß es lediglich auf die Zufallsvariable "Anzahl der Schneeflocken pro Fliese" ankommt. Diese Zufallsvariable bezeichne ich mit H. Um die Verteilung dieser Zufallsvariablen festzustellen, überlegen wir so: Unser (gedanklicher) Versuch besteht darin, daß wir eine Schneeflocke auf den Boden fallen lassen. Wir setzen dabei voraus, daß die Flocke nicht außerhalb des Bodens landet. Da keine der 16 Fliesen bevorzugt wird, wird jede Fliese mit der Wahrscheinlichkeit $p = 1/16$ getroffen. Diesen Versuch wiederholen wir $n=16$ mal. Statt die Flocken hintereinander fallen zu lassen, kann man sie auch gleichzeitig fallen lassen, muß aber voraussetzen, daß sie unabhängig voneinander fallen, d.h. sich gegenseitig nicht beeinflussen. Die Zufallsvariable H=Anzahl der Flocken pro Fliese ist dann binomialverteilt mit den Parametern $n=16$ und $p = 1/16$. Da p relativ klein ist, kann man diese Binomialverteilung durch eine Poissonverteilung mit dem Parameter $\mu = n \cdot p = 16 \cdot \frac{1}{16} = 1$ ersetzen (n ist nicht sehr groß, aber man kann nachrechnen, daß der Unterschied nicht ins Gewicht fällt.) Dann gilt:

$$W(H = k) = \frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu} = \frac{1}{k!} \cdot e^{-1}$$

Mit Hilfe dieser Formel kann man die Wahrscheinlichkeiten W (H = k) für k=0,1,2,3,... wie in der folgenden Tabelle berechnen. In der Tabelle sind noch die relativen Häufigkeiten von H = k für die einzelnen Muster eingetragen.

k	0	1	2	3	4	5	...
W(H=K)	0,37	0,37	0,18	0,06	0,02	0,00	...
Rel.Häuf.,1.Muster	0	1,00	0	0	0	0	...
Rel.Häuf.,2.Muster	0,44	0,25	0,19	0,13	0	0	...
Rel.Häuf.,3.Muster	0,44	0,25	0,19	0,13	0	0	...
Rel.Häuf.,4.Muster	0,50	0	0,50	0	0	0	...

Von den vier Mustern ist nun jenes am wahrscheinlichsten, dessen Häufigkeitsverteilung der theoretischen Wahrscheinlichkeitsverteilung am nächsten kommt. Man sieht sofort, daß das 1. und das 4. Muster der theoretischen Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht entsprechen. Das 2. und 3. Muster haben die gleiche Häufigkeitsverteilung, die offenbar der theoretischen Wahrscheinlichkeitsverteilung einigermaßen gut entspricht. Somit sind das 2. und 3. Muster in gleicher Weise als wahrscheinlichstes Muster anzusehen.

Man kann natürlich nicht erwarten, daß die Versuchspersonen diese Gedankengänge so nachvollziehen. Sehen wir uns daher an, wie diese intuitiv geurteilt haben.

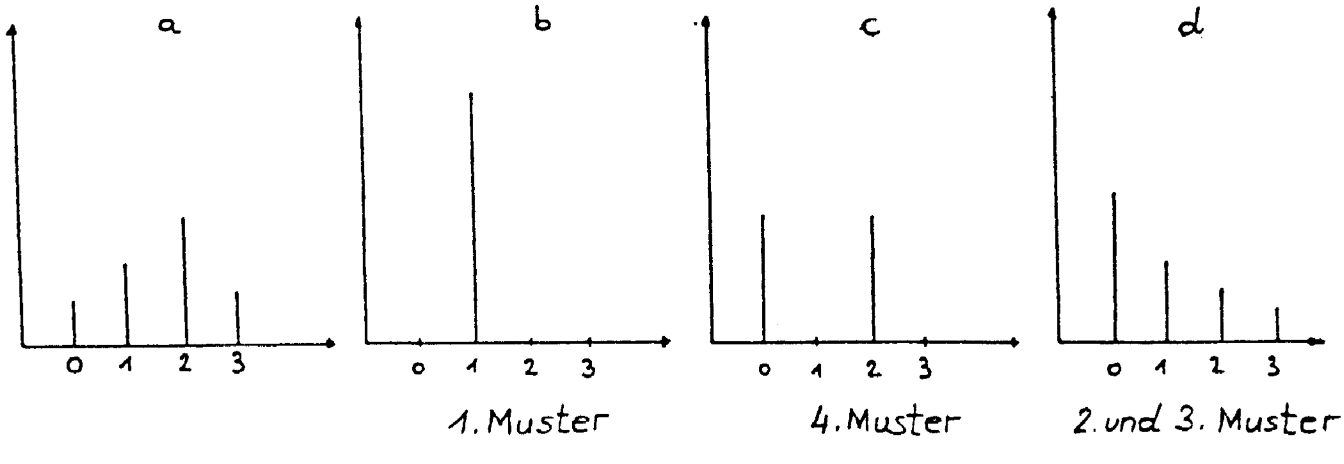
Auffallend war, daß praktisch niemand mit der Anzahl der Flocken pro Fliese argumentierte. Hingegen argumentierten alle Versuchspersonen in irgendeiner Weise mit dem Muster, das die Schneeflocken auf dem Boden bilden. Dabei waren sie sich in einem Punkt einig: Je geordneter, je regelmäßiger, je schöner ein Muster ist, desto geringer ist seine Wahrscheinlichkeit. Sie waren sich deshalb einig, daß das 2. Muster das wahrscheinlichste ist, weil dieses am ungeordnetsten ist.

Betrachten wir einen Ausschnitt aus dem Interview mit der 29-jährigen Johanna:

> J: Daß die Schneeflocken so gleichmäßig fallen, glaube ich nicht <zeigt auf Muster 4>. Daß auf jeder Fliese genau eine liegt, glaube ich auch nicht. Das 3. Muster scheint mir auch nicht das richtige zu sein. Warum soll genau der Rand frei bleiben? Der Schnee fällt wahrscheinlich so, wie es das 2. Muster zeigt.
> I: Kannst du das begründen?
> J: Meiner Meinung nach fällt Schnee ganz willkürlich. Die Schneeflocken im 2. Muster sind irgendwie am besten verteilt. So schön durcheinander. Da ist ein bißchen Chaos drinnen.

Zwei Ausnahmen bildeten lediglich Elke und Iris, die das 1. Muster für das wahrscheinlichste hielten. Sie beriefen sich dabei auf ihre Erfahrung, daß Schnee die Landschaft gleichmäßig bedeckt, übersahen dabei allerdings, daß sie mit so geringen Schneeflockenanzahlen keine Erfahrungen haben. Keine der Versuchspersonen hielt das 2. und das 3. Muster für gleich wahrscheinlich, wie es der theoretischen Lösung entspricht.

Ich legte den Versuchspersonen vier Diagramme vor, und fragte, welches Muster zu welchem Diagramm gehört. (Die richtige Lösung ist darunter angegeben.)



Alle Versuchspersonen konnten diese Zuordnungen ohne größere Schwierigkeit herstellen. Sie erkannten dabei auch, daß das 2. und 3. Muster die gleiche Häufigkeitsverteilung besitzen. Dies war für sie jedoch kein Grund, die beiden Muster als gleich wahrscheinlich zu betrachten. Mit einer Ausnahme hielten alle hartnäckig an ihrer Ansicht fest, daß das zweite Muster wahrscheinlicher sei als das dritte. Ihre hauptsächlichen Argumente waren dabei:
- das 2. Muster ist unregelmäßiger,
- der Rand kann nicht freibleiben,
- Schnee fällt nicht in eine Ecke,
- Schnee bedeckt den Boden gleichmäßig.

Zum Abschluß stellte ich noch die Frage: Angenommen, ich nehme das 2. Muster (samt Schneeflocken) auseinander und setze die Fliesen anders zusammen. Ändert sich dadurch die Wahrscheinlichkeit des Musters?

Mit einer Ausnahme waren alle Versuchchspersonen davon überzeugt, daß sich dabei die Wahrscheinlichkeit des Musters ändern kann. Die Ausnahme war der 17-jährige Robert, der alle Muster für gleich wahrscheinlich hielt und deshalb hier nicht anders antworten konnte. Die übrigen Versuchspersonen waren jedoch davon überzeugt, daß die Wahrscheinlichkeit abnimmt, wenn die Ordnung bzw. die Regelmäßigkeit durch die Umordnung zunimmt. Kurz: Zunahme an Ordnung vermindert die Wahrscheinlichkeit.

Literatur

ASSESSMENT OF PERFORMANCE UNIT (APU): Mathematical Development, Primary and Secondary Survey Reports, 1,2,3. HMSO 1981, 1982,1983.

BENTZ, H.-J. und BOROVCNIK, M.: Probleme empirischer Untersuchungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff. In: Journal für Mathematik-Didaktik 6 (1985), S. 241 - 264.

BENTZ; H.-J. und BOROVCNIK; M.: Empirische Untersuchungen zu Wahrscheinlichkeitsbegriff - Ein Fundus von Problemaufgaben. Klagenfurt/Osnabrück: Unveröffentlichtes Manuskript 1986.

BENTZ, H.-J. und BOROVCNIK, M.: Empirical Research on Probability Concepts. Erscheint in: KAPADIA, R. (Hrsg.): Chance Encounters - Probability in Education. A Review of Research and Pedagogical Perspectives. Dordrecht: D. Reidel 1989.

FISCHBEIN, E.: The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children. Dordrecht: D. Reidel Publ. Comp. 1975.

FISCHBEIN, E.: Image and Concept in Learning Mathematics. In: Educational Studies in Mathematics 8(1977), S. 153 - 165.

FISCHBEIN, E.: Intuitions and Mathematical Education. In: Proceedings of the Second Int. Conf. for the Psych. of Math. Educ. Osnabrück: Osnabrücker Schriften zur Mathematik, Reihe D, 1978.

FISCHBEIN, E.: Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach. Dordrecht: D. Reidel, 1987.

FISCHBEIN, E. und GAZIT, A.: Does the Teaching of Probability Improve Probabilistic Intuitions? In: Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics,Bd. 2: Sheffield: Teaching Statistics Trust 1983, S. 738 - 753.

FISCHBEIN, E. und GAZIT, A.: Does the Teaching of Probability Improve Probabilistic Intuitions? In: Educational Studies in Mathematics 15(1984), S. 1 - 24.

GREEN, D.R.: Probability concepts in 11-16 Year Old Pupils. Loughborough: Report 1982.

GREEN, D.R.: A Survey of Probability Concepts in 3000 Pupils Aged 11-16 Years. In: Grey, D.R. e.a. (Hrsg): Proceedings of the First Int. Conf. on Teach. Stat. Bd. 2. Sheffield: Teaching Statistics Trust 1983, S. 766-783.

GREEN, D.R.: Der Wahrscheinlichkeitsbegriff bei Schülern, In: Stochastik in der Schule 3 (1983), S. 25-38.

KAHNEMAN, D.,SLOVIC, P. und TVERSKY, A. (Hrsg.): Judgement under Uncertainty. Heuristics and Biases. Cambridge: Cambridge University Press 1982.

KAHNEMAN, D. und TVERSKY, A.: Subjectives Probability: A Judgement of Representativeness. In: Cognitive Psychology (1972), S. 430-454.

KAHNEMAN, D. und TVERSKY, A.: On the Psychology of Prediction. In: Psychological Review 80(1973), S. 237-251.

KAHNEMAN, D. und TVERSKY, A.: Jugdement under Uncertainty: Heuristics and Biases. In: Science 185 (1974), S. 1124 - 1131.

KAPADIA,R.: Didactical Phenomenology of Probability. In: DAVIDSON, R. und SWIFT, J. (Hrsg.): Proceedings of the Second Int.Conf. on Teach. Stat. Victoria: 1987, S. 260 - 264.

KAPADIA, R. (Hrsg.): Chance Encounters - Probability in Education. A Review of Research and Pedagogical Perspectives. Dordrecht: D. Reidel 1989.

KERSLAKE, D.: Some Children's Views on Probability. In: Mathematics in School 5 (1974) 4, S. 22.

MONKS, A. R.: Gleich wahrscheinlich. In: Stochastik in der Schule 6 (1986) 2, S. 25 - 30.

PIAGET, J. und INHELDER, B.: La genése de l'idee du hasard chez l'enfant. Paris: Presses Universitaires de France 1951.

SCHOLZ, R.: Stochastische Problemaufgaben - Analysen aus didaktischer und psychologischer Perspektive. Bielefeld: Materialien und Studien Bd. 23, 1981.

SHAUGHNESSY, J.M.: Misconceptions of Probability: An Experiment with a Small-group, Activity based Model Building Approach to Introductory Probability. In: Educational Studies of Mathematics 8 (1977), S. 295 - 316.

SHAUGHNESSY, J.M.: Misconceptions of Probability: From Systematic Errors to Systematic Experiments and Decisions. In: SHULTE, A.P. and SMART, J.R. (Hrsg.): Teaching Statistics and Probability. Reston: The National Council of Teachers of Mathematics 1981.

SHAUGHNESSY, J.M.: Misconceptions of Probability, Systematic and otherwise: Teaching Probability and Statistics so as to Overcome some Misconceptions. In: Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics. Bd. 2. Sheffield: Teaching Statistics Trust 1983, S. 784 - 802.

TRAAR, S.: Intuitive Vorstellungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff. Diplomarbeit, Universität Klagenfurt, 1989 .

TRURAN, J.: Das Verständnis von Symmetrie bei Kindern. In: Stochastik in der Schule 6 (1986) 2, S. 31 -38.